対称群の表現論 (組合せ論講義ノート)

橋本隆司

目次

第 1 章　対称群，線形代数　7

1　n 次対称群 7

2　線形代数 11

第 2 章　$\mathfrak{S}_n$ の表現論　19

3　有限群の表現論 19

4　指標 23

5　Specht 加群 30

参考文献　37

はじめに

この講義ノートは鳥取大学大学院工学研究科情報エレクトロニクス専攻の博士前期課程 1 年生を対象に行われた講義「組合せ論」の講義ノートを加筆・修正して作成された．

講義では対称群の表現論への入門的な解説を行うことを目標とし，第 1 章では対称群の構造について簡単におさらいした後，線形代数の復習を行い，多重線形代数，すなわち，ベクトル空間のテンソル積，外積代数，対称代数について説明した．ついで第 2 章においては有限群の表現論および指標について解説した後，対称群の表現を組合せ論的に構成する Specht 加群についての解説を行った．線形代数が縦横に駆使される様子を目の当たりにすることができるかと思う．

第 1 章

対称群，線形代数

1　n 次対称群

1.1　n 次対称群

定義 1.1.1. X, Y を 2 つの集合，$f : X \to Y$ を X から Y への写像とする．

1. f が**全射**（**上への写像**）$\overset{\text{def.}}{\iff} f(X) = Y$
2. f が**単射**（**1 対 1 写像**）$\overset{\text{def.}}{\iff} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
3. f が**全単射** $\overset{\text{def.}}{\iff} f$ は全射かつ単射．このとき $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ とかく．

部分集合 $A \subset X$ に対し，$f(A) = \{f(x) \in Y; x \in A\}$ を，f による A の**像**という．部分集合 $B \subset Y$ に対し，$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$ を，f による B の**逆像**という．1 点のみからなる集合の逆像 $f^{-1}(\{y\})$ を単に $f^{-1}(y)$ とかく．また写像 $f : X \to Y$ を，部分集合 $A \subset X$ に制限して得られる写像を，$f|_A : A \to Y$ とかく．

2 つの写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ が与えられたとき，その**合成写像** $g \circ f : X \to Z$ とは，各 $x \in X$ に対し，Z の元 $g(f(x))$ を対応させる写像である．

X からそれ自身への**恒等写像**を $1_X : X \to X, x \mapsto x$ と定める．

写像 $f : X \to Y$ が全単射であるとき，$\forall y \in Y$ に対し，$y = f(x)$ となる X の元 x がただ 1 つ存在するので，Y から X への写像が定まる．この写像

$$Y \to X, \quad y \mapsto x \quad （ただし\ y = f(x)）$$

を f の**逆写像**といい，f^{-1} とかく．このとき

$$f^{-1} \circ f = 1_X,\ f \circ f^{-1} = 1_Y$$

がなりたつ．

自然数 n に対し，集合 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への全単射な写像全体のなす集合に，写像の合成により積を定義したものを **n 次対称群**といい，$\mathfrak{S}_n$ とかく．単位元は恒等写像 $1_{[n]}$，σ の逆元は逆写像 σ^{-1} である．$\mathfrak{S}_n$ の各元を**置換**という．$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ により，

$i \mapsto \sigma(i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ となるとき，σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

とかく．σ が全単射であるとは，$i \neq j \Rightarrow \sigma(i) \neq \sigma(j)$ を意味する．この記法で，$\sigma\tau = \rho$，すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(n) \end{pmatrix}$$

とすると，$\rho(i) = \sigma(\tau(i))$ となる[*1]．例えば，$n = 3$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となることからわかるように，$n \geqslant 3$ のとき，$\mathfrak{S}_n$ は非可換な有限群で，その位数は $n!$ に等しい．

定義 1.1.2. 集合 G が**群**である $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ G は次の 3 条件を満たす：

1. $\forall x, y, z \in G$ に対し，**結合法則** $(xy)z = x(yz)$ がなりたつ．
2. **単位元**とよばれる G の元 e が存在して，$\forall x \in G$ に対し，$xe = ex = x$ がなりたつ．
3. $\forall x \in G$ に対し，G の元 x' が存在して，$xx' = x'x = e$ がなりたつ．この元 x' を x の**逆元**とよび，x^{-1} とかく．

群 G の集合としての濃度 $\#G$ が有限であるとき，G を**有限群**といい，$\#G$ を G の**位数**という．

1.2　巡回置換，互換

いま

$$i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_{l-1} \to i_l \to i_1$$

となる $\mathfrak{S}_n$ の元 σ を l 次の**巡回置換**といい $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_l)$ とかく．

例 1.2.1. $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ は巡回置換で，$\sigma = (1, 2, 3)$ とかける．同様に，$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = (1, 3, 2)$.

命題 1.2.2. 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ はいくつかの巡回置換の積でかける．

例 1.2.3.

1. $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ について
$$1 \to 3 \to 4 \to 1, \quad 2 \to 5 \to 2 \qquad \therefore \sigma = (1, 3, 4)(2, 5) = (2, 5)(1, 3, 4).$$
2. $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ について
$$1 \to 4 \to 1, \quad 3 \to 5 \to 3, \quad 6 \to 7 \to 6 \qquad \therefore \sigma = (1, 4)(3, 5)(6, 7).$$

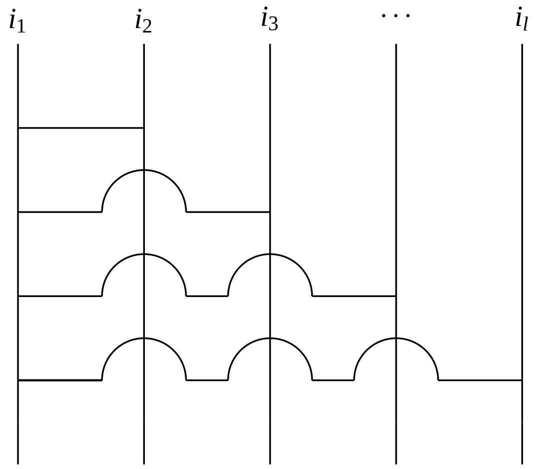
[*1] 本によっては，$\rho(i) = \tau(\sigma(i))$ とする逆の流儀もあるので注意．

2 次の巡回置換を**互換**という．

命題 1.2.4. 任意の巡回置換は互換の積でかける．実際，

$$(i_1, i_2, \ldots, i_l) = (i_1, i_l)(i_1, i_{l-1}) \ldots (i_1, i_2).$$

証明． 右辺の置換の積を図式化すると次のようになる:



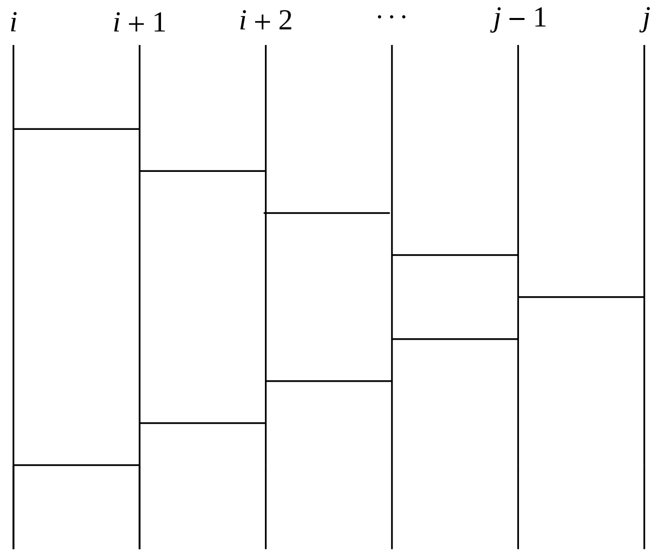
これが左辺の置換に等しいことは明らか． □

命題 1.2.5. 任意の互換 $(i.j)$ $(i < j)$ に対し，

$$(i, j) = (i, i+1)(i+1, i+2) \ldots (j-2, j-1)(j-1, j)(j-2, j-1) \ldots (i, i+1)$$

が成り立つ．

証明． 上の命題と同様，右辺の置換の積を図式化すると以下の如し:



これが左辺の置換に等しいことも明らか． □

互換 $(i, i+1)$ を**隣接互換**という．

定理 1.2.6. 任意の置換はいくつかの隣接互換の積でかける．ただし，その表し方は一通りとは限らない．

例 1.2.7. $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (1,2)(2,3)(1,2) = (2,3)(1,2)(2,3)$.

隣接互換 $(i, i+1)$ を s_i とかく．与えられた $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，

$$\sigma = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k} \tag{1.2.1}$$

とかいたときの k の最小値を σ の**長さ**といい，$\ell(\sigma)$ とかく．特に $\ell(e) = 0$ とする．また，(1.2.1) において，$k = \ell(\sigma)$ となるとき，右辺を σ の**最短表示**という．

問 1.2.8. $\mathfrak{S}_3$ のすべての元に対し，その長さを求めよ．

問 1.2.9. $\mathfrak{S}_4$ の元で長さが最大になる元 w_{o} を求めよ．また，$\ell(w_{\mathrm{o}})$ および w_{o} の最短表示を求めよ．

1.3　共役・型

定義 1.3.1. $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ が**共役** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists g \in \mathfrak{S}_n$ s.t. $\tau = g\sigma g^{-1}$.

注意 1.3.2. $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対し，$\sigma \sim \tau$ を "σ と τ が共役" と定めると，2 項関係 $\sim$ は同値関係，すなわち, 次の 3 つの条件をみたす：

1. $\sigma \sim \sigma \quad (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n)$
2. $\sigma \sim \tau \Rightarrow \tau \sim \sigma$
3. $\sigma \sim \tau$ かつ $\tau \sim \rho \Rightarrow \sigma \sim \rho$

今，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を

$$\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_{l_1})(j_i, j_2, \ldots, j_{l_2}) \cdots (k_1, k_2, \ldots, k_{l_s})$$

と互いに共通部分のない巡回置換の積にかくとき，各因子は互いに可換なので

$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_s > 0, \quad (l_1 + l_2 + \cdots + l_2 = n)$$

としてよい．数列 $(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ は σ により一意に決まる．この数列を σ の定める**分割**という．また，$p = 1, 2, \ldots, n$ に対し，$l_i = p$ となる l_i の個数を $\alpha_p = \alpha_p(\sigma)$ とかき

$$1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n} \quad (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots n\alpha_n = n,\ \alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_n \geqslant 0)$$

を σ の**型**という．

例 1.3.3. $\sigma = 354162879$[*2] は $\sigma = (1,3,4)(2,5,6)(7,8)(9)$ とかけるので，σ の分割は $(3,3,2,1)$，型は 123^2.

[*2] 置換 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 8 & 7 & 9 \end{smallmatrix}\right)$ を行き先 (2 行目) だけを抜き出して，単にこうかく (one-line notation).

定理 1.3.4. σ と τ が共役であるための必要十分条件は，σ と τ の型が一致することである．

証明 . $\Rightarrow$: $\sigma' = g\sigma g^{-1}$, $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s$ (σ_i は l_i 次の巡回置換) とすると，$g\tau g^{-1} = g\sigma_1 g^{-1}\cdot g\sigma_2 g^{-1}\cdots g\sigma_s g^{-1}$ で，$g\sigma_i g^{-1}$ は互いに共通部分のない l_i 次の巡回置換.

$\Leftarrow$:(略)) □

2　線形代数

2.1　線形代数 (復習)

以下，体 k は $\mathbb{R}$，または $\mathbb{C}$ とする．

定義 2.1.1 (vector space)**.** V が *k-vector space* $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

1. V は加法群,
2. スカラー倍とよばれる写像 $k\times V\to V,\ (\lambda, v)\mapsto \lambda v$ が定義されていて,
   (a) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
   (b) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v,\ (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
   (c) $1v = v$
   がすべての $\lambda,\mu\in k$ と $u, v\in V$ についてなりたつ.

k-vector space V の部分集合 $U\subset V$ が，上の 3 条件を満たすとき，U を V の *k-vector subspace*，あるいは単に**部分空間**という．

定義 2.1.2.

1. V を k-vector space とする．$\{v_i, v_2, \ldots, v_r\}\subset V$ が k 上**一次独立**または**線形独立** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in k$ に対し
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$$
が成り立つ．
2. $\Sigma = \{v_i, v_2, \ldots, v_n\}$ が V の k-**基底** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ Σ は k 上一次独立であって，$\forall v\in V$ は
$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \tag{2.1.1}$$

とかける．このとき，n を V の k 上の**次元**とよび，$n = \dim_k V$ とかく．体 k が明らかなときは添え字を省略する．また，(2.1.1) の形を $v_1,,\ldots,v_n$ の**一次結合**または**線形結合**という．

例 2.1.3. $\mathbb{C}^n = \{(x_1,\ldots,x_n)^t; x_i\in\mathbb{C}\}$ (n 次列ベクトルの全体)

定義 2.1.4 (線形写像)**.** V, W を k-vector space とするとき，写像 $\phi: V\to W$ が k-**線形写像** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

1. $u, v \in V \Rightarrow \phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$　(ϕ は加法群の準同型)
2. $\lambda \in k, v \in V \Rightarrow \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$　(ϕ はスカラー倍の作用と可換)

V から W への k-線形写像の全体を $\mathrm{Hom}_k(V, W)$，また $\mathrm{Hom}_k(V, V)$ を $\mathrm{End}_k(V)$ とかく．

$\mathrm{Hom}_k(V, W)$ に和 $f+g$ およびスカラー倍 λf ($f, g \in \mathrm{Hom}_k(V, W), \lambda \in k$) を

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v), \quad (\lambda f)(v) := \lambda f(v) \qquad (v \in V) \tag{2.1.2}$$

により定めると，$\mathrm{Hom}_k(V, W)$ はまた k-vector space になる．

$\Sigma_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}, \Sigma_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ をそれぞれ V, W の基底とすると，$\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して，$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ が

$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.1.3}$$

により定まる．行列 A を基底 Σ_1, Σ_2 に関する ϕ の**表現行列**という．(2.1.3) を行列の形で表せば

$$(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)) = (w_1, \ldots, w_m)A.$$

$\Sigma_1' = \{v_1', \ldots, v_n'\}, \Sigma_2' = \{w_1', \ldots, w_m'\}$ をそれぞれ V, W のもう一つの基底とするとき，Σ_1', Σ_2' に関する ϕ の表現行列 B と，A との関係はどうなるかを見よう．Σ_1 と Σ_1' の間の**基底の変換行列**を $P = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, i.e. $v_j' = \sum_i \alpha_{ij} v_i$ とする．これを行列の形で書くと

$$(v_1', \ldots, v_n') = (v_1, \ldots, v_n)P. \tag{$\star$}$$

同様に，Σ_2 と Σ_2' の間の基底の変換行列を Q とする:

$$(w_1', \ldots, w_m') = (w_1, \ldots, w_m)Q.$$

このとき $AP = QB$ となることが容易にわかる．すぐあとに示すように，基底の変換行列は可逆であるので，従って $B = Q^{-1}AP$ となる．

命題 2.1.5. V の基底を，$\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ とし，Σ から Σ', Σ' から Σ''，また Σ から Σ'' への変換行列をそれぞれ P_1, P_2, P_3 とすると，$P_3 = P_1P_2$ である．特に，$\Sigma = \Sigma''$ とすれば $P_3 = I$ であるから，基底の変換行列は可逆である．

証明 . $\Sigma := \{v_1, \ldots, v_n\}, \Sigma' := \{v_1', \ldots, v_n'\}, \Sigma'' := \{v_1'', \ldots, v_n''\}$ とすると，

$$\begin{aligned}(v_1', \ldots, v_n') &= (v_1, \ldots, v_n)P_1 \\ (v_1'', \ldots, v_n'') &= (v_1', \ldots, v_n')P_2 \\ (v_1'', \ldots, v_n'') &= (v_1, \ldots, v_n)P_3.\end{aligned}$$

一番目の式を二番目の右辺に代入して $(v_1'', \ldots, v_n'') = (v_1, \ldots, v_n)P_1P_2$, これと三番目と比較して，$P_3 = P_1P_2$ ($\because v_1, \ldots, v_n$ は一次独立). □

商ベクトル空間

k-vector space$V$ とその部分空間 U に対し，$V \ni v, w$ の間の 2 項関係 $\sim$ を

$$v \sim w \overset{\text{def.}}{\iff} v - w \in U$$

で定めると，これは同値関係で，商集合 $V/\sim$ に和およびスカラー倍を

$$[u] + [v] := [u + v], \quad \lambda[v] := [\lambda v] \qquad (u, v \in V, \lambda \in k)$$

により定める[*3]と，$V/\sim$ は k-vector space になる．これを V を U で割った**商ベクトル空間**といい，V/U とかく．このとき，自然な射影 $V \to V/U, v \mapsto [v]$ は全射な線形写像になる．

定理 2.1.6 (準同型定理)**.** $\phi : V \to W$ を k-vector space の線形写像とすると，

$$\overline{\phi} : V/\operatorname{Ker}\phi \to \operatorname{Im}\phi, \quad [v] \to \phi(v) \tag{2.1.4}$$

は同型写像になる．

系 2.1.7. $\phi \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ について，$\dim V = \dim \operatorname{Ker}\phi + \dim \operatorname{Im}\phi$

系 2.1.8. $\dim V = \dim W$ とすると，$\phi \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ について，ϕ が単射 $\Leftrightarrow$ ϕ が全射．

直和

k-vector space の族 $\{V_i\}_{i=1,2,\ldots,r}$ に対し，直積集合 $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ に和およびスカラー倍を

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_r) + (y_1, y_2, \ldots, y_r) &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_r + y_r),\\ \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_r) &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_r)\end{aligned}$$

により定義すれば, k-vector space になる．これを $\{V_i\}$ の**直和空間**といい, $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$, または $\bigoplus_{k=1}^{r} V_k$ で表す．写像 $\iota_i : V_i \to \bigoplus_{k=1}^{r} V_k,\ x_i \mapsto (0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$ (i 番目以外はゼロベクトル) は単射線形写像で，これにより各 V_i を直和空間 $\bigoplus V_k$ の部分空間とみなすことができる．このとき $(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$ に注意．

双対空間

(2.1.2) において，$W = k$ としたものを V^* とかき，V の**双対空間**という．$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の基底とすると，任意の $v \in V$ は $v = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$ $(c_1, \ldots, c_n \in k)$ と一意的にかけるので

$$f_i(v) = c_i$$

[*3] ただし $[v]$ は v の同値類をあらわす

とおくと，$f_i \in V^*$ $(i = 1, \dots, n)$，さらに $\{f_1, \dots, f_n\}$ が V^* の基底となることがわかる．これらは $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ をみたす．基底 $f_i, \dots, f_n$ を $\{e_1, \dots, e_n\}$ の**双対基底**という．

例 2.1.9. $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t; x_i \in \mathbb{C}\}$ の双対空間 $(\mathbb{C}^n)^*$ は $\{u = (u_1, \dots, u_n); u_i \in \mathbb{C}\}$ (行ベクトル) ただし

$$\langle u, x\rangle = (u_1, \dots, u_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_i u_i x_i$$

$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t$ (第 i 成分以外は 0) とおくとき，$\{e_1, \dots, e_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底で，その双対基底は $\{e_1^t, \dots, e_n^t\}$.

注意 2.1.10. 一般に，任意の (有限次元) ベクトル空間 V に対し，自然な同型 $(V^*)^* \simeq V$ が成り立つ．

2.2 テンソル積

次にベクトル空間のテンソル積に導入したいのだが，その前に，例を一つ挙げよう．

例 2.2.1. $V := \mathbb{C}^n = \{\boldsymbol{x} := (x_1, \dots, x_n)^t; x_i \in \mathbb{C}\}$ に対して，V のベクトル空間としての構造は，なにも各成分が $\mathbb{C}$ の元である必要はなく，和とスカラー倍が定義されている空間，すなわちベクトル空間の元であれば，全く同じようにして定義できることは明白であろう．そこで例えば，$W := \mathbb{C}^m \ni \boldsymbol{y} := (y_1, \dots, y_m)^t$ として，ベクトル $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} := (x_1\boldsymbol{y}, \dots, x_n\boldsymbol{y})^t \in \mathbb{C}^{nm}$ の全体を $V \otimes W$ とかく (**係数拡大**)．このとき，次が成り立つことに注意: 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in W; \lambda, \mu \in k$ に対して

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}') \otimes \boldsymbol{y} &= \lambda\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} + \mu\boldsymbol{x}' \otimes \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \otimes (\lambda\boldsymbol{y} + \mu\boldsymbol{y}') &= \lambda\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} + \mu\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}'\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

また $V = \mathbb{C}^n, W = \mathbb{C}^m$ の基底として，それぞれ $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}, \{f_j\}_{j=1,\dots,m}$，ただし

$$e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)^t \qquad f_j = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0)^t$$

をとれば，$e_i \otimes f_j$ $(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ が $V \otimes W$ の基底となることは明らかであろう．特に $\dim(V \otimes W) = nm$.

上の例を一般化して，ベクトル空間のテンソル積を次のように定義する．V, W, T を k-vector space，$\dim V = n, \dim W = m$ とする．写像 $\Phi : V \times W \to T$ が**双線形**，i.e. 任意の $x, x' \in V; y, y' \in W; \lambda, \mu \in k$ について

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda x + \mu x', y) &= \lambda\Phi(x, y) + \mu\Phi(x', y) \\ \Phi(x, \lambda y + \mu y) &= \lambda\Phi(x, y) + \mu\Phi(x, y')\end{aligned}$$

を満たすとする．さらに次の条件を考える:

(T1) $x_1, \ldots, x_r \in V$ が一次独立ならば $y_1, \ldots, y_r \in W$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} \Phi(x_i, y_i) = 0 \Rightarrow y_i = 0 \ (i = 1, \ldots, r)$$

(T1') $y_1, \ldots, y_r \in W$ が一次独立ならば，$x_1, \ldots, x_r \in V$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} \Phi(x_i, y_i) = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ (i = 1, \ldots, r)$$

(T2) T は $\Phi(x, y)$ $(x \in V, y \in W)$ により生成される．

補題 2.2.2. 上の記号の下，Φ が (T1)，(T2)（または (T1')，(T2)）を満たす $\Leftrightarrow V, W$ の基底をそれぞれ $\{e_i\}, \{f_j\}$ とするとき，$\Phi(e_i, f_j)$ が T の基底である．

このとき，次の定理が成り立つことが知られている:

定理 2.2.3. k-vector space V, W が任意に与えられたとき，k-vector space T，および双線形写像 $\Phi : V \times W \to T$ で，(T1)，(T1') および (T2) を満たすものが存在する．さらに，このような組 (T, Φ) は次の意味で普遍的である: (T', Φ') を k-vector space と双線形写像 $V \times W \to T'$ の勝手な組とするとき，線形写像 $\rho : T \to T'$ で

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "\Phi'"] & \\ T \arrow[r, "\rho"'] & T' \end{tikzcd}$$

$$\Phi'(x, y) = \rho(\Phi(x, y)) \quad (x \in V, y \in W)$$

を満たすものが一意に定まる．

このとき，

$$V \otimes W := T, \qquad x \otimes y := \Phi(x, y)$$

とかき，$V \otimes W$ を V と W のテンソル積という．$V \otimes W$ は k-vector space であるばかりでなく，双線形写像

$$V \times W \to V \otimes W, \quad (x, y) \mapsto x \otimes y$$

が与えられていて，(T1),(T1'),(T2) を満たすことに注意．また補題より，$\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$.

命題 2.2.4. U, V, W を k-vector space とするとき，

1. $V \otimes W \simeq W \otimes V \quad x \otimes y \leftrightarrow y \otimes x$
2. $(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W) \quad (x \otimes y) \otimes z \leftrightarrow x \otimes (y \otimes z)$
3. $V \otimes k \simeq k \otimes V \simeq V \quad x \otimes \lambda \leftrightarrow \lambda \otimes x \leftrightarrow \lambda x$

命題 2.2.4 の 2.(テンソル積の結合則) より，$(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W)$ を，単に $U \otimes V \otimes W$ とかく．また，テンソル積は括弧のつけ方に無関係に定まるので $\bigotimes_{i=1}^{s} V_i = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_s$ で表す．特に，$V_1 = V_2 = \cdots = V_s = V$ のとき，$\bigotimes_{i=1}^{s} V_i = V^{\otimes s}$ とかく．

命題 2.2.5. $\Psi : (V^*)^{\otimes s} \simeq (V^{\otimes s})^*$，$\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_s \mapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \mapsto \phi_1(v_1)\cdots\phi_s(v_s))$

証明 . V の基底を $\{e_i\}$，V^* の双対基底を $\{f_i\}$ とすると，$\phi = \sum \xi_{i_1 \ldots i_s} f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_s}$ とかける．仮定より，任意の $(V^{\otimes s})^*$ の元での ϕ の値がゼロであるから，特に

$$0 = \phi(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s}) = \sum_{j_1,\ldots,j_s} \left\langle f_{j_1}, e_{i_1} \right\rangle \cdots \left\langle f_{j_s}, e_{i_s} \right\rangle = \xi_{i_1 \cdots i_s} \quad (\forall i_1, \ldots, i_s)$$
$$\therefore \phi = 0.$$

すなわち Ψ は単射．$\dim(V^*)^{\otimes s} = \dim(V^{\otimes s})^* = (\dim V)^s$ であるから，Ψ は同型． □

問 2.2.6. $\mathrm{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$ であることを示せ．

2.3　テンソル代数，外積代数，対称代数

直和空間 $T(V) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} V^{\otimes r}$ (ただし $V^{\otimes 0} = k$) に和とスカラー倍を以下で定義する: $t = \sum t_r, t' = \sum t'_r$ $(t_r, t'_r \in V^{\otimes r}$; 有限和) に対して，

$$t + t' := \sum (t_r + t'_r), \qquad \lambda t := \sum \lambda t_r$$

これにより，$T(V)$ は k-vector space となるが，さらに，積 tt' を

$$tt' := \sum_n \Big(\sum_{r+s=n} t_r \otimes t'_s \Big)$$

で定義すれば，これは双線形，かつ，結合則および分配側を満たす．これを V のテンソル代数という．

外積代数

次に，線形写像 $\mathscr{A}_n : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ を

$$\mathscr{A}_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\sigma} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

で定義し[*4]，$\bigwedge^n V := \mathscr{A}(V^{\otimes n})$ とおく (ただし，$\bigwedge^0 V := k$). $\bigwedge^{\bullet} V := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n V$ を V の外積代数という．

例 2.3.1. $n = 2$ のとき，$\mathscr{A}_2(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$
$n = 3$ のとき

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = {} & v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 - v_1 \otimes v_3 \otimes v_2 \\ & + v_2 \otimes v_3 \otimes v_1 + v_3 \otimes v_1 \otimes v_2 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1\end{aligned}$$

$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n := \mathscr{A}_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ とかく．

[*4] $(-1)^{\sigma} := (-1)^{\ell(\sigma)}$

命題 2.3.2.
1. $v_1 \wedge \cdots \wedge (\lambda v_i + \mu v_i') \wedge \cdots \wedge v_n = \lambda v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_n + \mu v_1 \wedge \cdots \wedge v_i' \wedge \cdots \wedge v_n$
2. $v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} = (-1)^\sigma v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$

$\dim V = N$ とすると, $\dim \bigwedge^n V = \binom{N}{n}$ で $\{e_1, \ldots, e_N\}$ が V の基底ならば, $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}; 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant N\}$ が $\bigwedge^n V$ の基底.

命題 2.3.3. 線形写像 $\bigwedge^k V \otimes \bigwedge^{n-k} W \to \bigwedge^n (V \oplus W)$ を $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \otimes (w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-k}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-k}$ により定義するとき，同型 $\bigoplus_{k=0}^n (\bigwedge^k V \otimes \bigwedge^{n-k} W) \simeq \bigwedge^n (V \oplus W)$ を得る.

命題 2.3.4. 線形写像 $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k \mapsto (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto \sum_\sigma (-1)^\sigma \phi_{\sigma(1)}(v_1) \cdots \phi_{\sigma(k)}(v_k))$ により，同型 $\bigwedge^k V^* \simeq (\bigwedge^k V)^*$ を得る.

問 2.3.5. V の基底を $\{e_i\}$，V^* の双対基底を $\{e_i^*\}$ とするとき，$\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*; i_1 < \cdots < i_k\}$ が $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}$ の双対基底となることを示せ.

対称代数

線形写像 $\mathscr{S}_n : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ を

$$\mathscr{S}_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

で定義し，$\mathrm{Sym}^n V := \mathscr{S}_n(V^{\otimes n})$ とかき，$\mathrm{Sym}^\bullet V := \bigoplus_{n=0}^\infty \mathrm{Sym}^n V$ を V の対称代数という.

例 2.3.6. $n = 2$ $\mathscr{S}_2(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$

$\mathscr{S}_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ を単に $v_1 \cdots v_n$ とかく (cf. 下の命題 2.3.7 の 2.).

命題 2.3.7.
1. $v_1 \cdots (\lambda v_i + \mu v_i') \ldots v_n = \lambda v_1 \ldots v_i \ldots v_n + \mu v_1 \ldots v_i' \ldots v_n$
2. $v_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)} = v_1 \ldots v_n$

V の基底を $\{e_1, \ldots, e_N\}$ とすると，$\{e_1^{i_1} \cdots e_N^{i_N}; i_1, \ldots, i_N \geqslant 0, i_1 + \cdots + i_N = n\}$ が $\mathrm{Sym}^n V$ の基底.

問 2.3.8. $\dim \mathrm{Sym}^n V = \binom{N+n-1}{N-1} = \binom{N+n-1}{n}$ を示せ.

命題 2.3.9. $\mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^{n-k} W \to \mathrm{Sym}^n (V \oplus W)$ を $v_1 \ldots v_a \otimes w_1 \ldots w_{n-k} \mapsto v_1 \ldots v_k w_1 \ldots w_{n-k}$ により定義すれば，同型 $\bigoplus_{k=0}^n \mathrm{Sym}^k V \otimes \mathrm{Sym}^{n-k} W \simeq \mathrm{Sym}^n (V \oplus W)$ を得る.

証明． $p := \dim V, q := \dim W$ とおくと $\dim(V \oplus W) = p + q$. ゆえに $\dim \mathrm{Sym}^n (V \oplus W) = \binom{p+q+n-1}{p+q-1}$. 一方，次の補題 2.3.10 より $\dim(\mathrm{LHS}) = \sum_{k=0}^n \binom{p+k-1}{a}\binom{q+n-k-1}{n-k} = \binom{p+q-1}{n} = \dim(\mathrm{RHS})$. □

補題 2.3.10. 等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k-1}{a}\binom{q+n-k-1}{n-k}=\binom{p+q-1}{n}$$

が成り立つ.

証明 . $\alpha\in\mathbb{C}$ に対し，展開式 $(1-x)^{-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+k-1}{k}x^k$ が成り立つ．そこで $(1-x)^{-p}(1-x)^{-q}=(1-x)^{-p-q}$ の両辺で x^n の係数を比較することにより，望む等式を得る． □

命題 2.3.11. 写像 $\phi_i\ldots\phi_n\mapsto(v_1\ldots v_k\mapsto\sum_\sigma\phi_{\sigma(1)}(v_1)\cdots\phi_{\sigma(k)}(v_k))$ により，同型 $\mathrm{Sym}^n V^*\simeq(\mathrm{Sym}^n V)^*$ を得る.

証明 . 外積代数の場合と同様，i.e. $\mathrm{Sym}^n V^*\hookrightarrow(V^*)^{\otimes n}\simeq(V^{\otimes n})^*$ □

V の基底を $\{e_1,\ldots,e_N\}$，V^* の双対基底を $\{e_1^*,\ldots,e_N^*\}$ とすると，

$$\left\{\frac{1}{\prod_\alpha(i_\alpha!)}(e_1^*)^{i_1}\ldots(e_N^*)^{i_N}\right\}$$

が，$\mathrm{Sym}^n V$ の基底 $\{e_1^{i_1}\ldots e_N^{i_N}\}$ の ($\mathrm{Sym}^n V^*$ の) 双対基底となる.

以上で，線形代数，多重線形代数からの準備を終える.

第 2 章

$\mathfrak{S}_n$ の表現論

3　有限群の表現論

以下，特に断らない限り，ベクトル空間といえば複素数体 $\mathbb{C}$(代数的閉体) 上のものとする．

3.1　定義

G を (有限) 群，V を有限次元ベクトル空間とし，$GL(V) := \{f : V \to V; \text{線形同型}\}$ とする．

定義 3.1.1. 写像 $\rho : G \to GL(V)$ が群準同型であるとき，組 (ρ, V) を G の**表現**という．表現 (ρ, V) に対して，V を G **加群**，$\dim V$ を ρ の**次数**という．また，$\rho(g)v$ を単に gv とかく．

(σ, W) をもう一つの G の表現とする．

定義 3.1.2. $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ が *G-linear map* $\overset{\text{def.}}{\iff}$ 図式
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & W \arrow[d, "\sigma(g)"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$
がすべての $g \in G$ について可換．G-linear map の全体を $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ とかく．

G の表現 (ρ, V) に対し，

1. $W \subset V$ が**部分表現**または**部分 G 加群** $\overset{\text{def.}}{\iff} \rho(G)W \subset W$, i.e. $g \in G, v \in W \Rightarrow gv \in W$.
2. V が**可約表現** $\overset{\text{def.}}{\iff}$ V の部分 G 加群 W で，$V \supsetneq W \supsetneq \{0\}$ を満たすものが存在する．
3. V が**既約表現** $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $V \neq \{0\}$，かつ，V は可約でない．
4. W が V の部分 G 加群ならば，V/W も自然な G の作用で G-module となる．これを V の W による**商表現**という．

$\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ に対し，$\mathrm{Ker}\,\phi, \mathrm{Im}\,\phi$ はそれぞれ V, W の部分 G 加群で，$\mathrm{Coker}\phi :=$

$W/\operatorname{Im}\phi$ は，商表現となる．

V, W を二つの G-module とするとき，直和 $V \oplus W$，テンソル積 $V \otimes W$ は

$$g(v+w) := gv + gw \qquad g(v \otimes w) := gv \otimes gw \qquad (g \in G, v \in V, w \in W)$$

と定義することにより，G-module となる．

注意 3.1.3. G-module V に対し，$V^{\otimes n}$ は G-module で，$\bigwedge^n V, \mathrm{Sym}^n V$ はその部分 G 加群である．

G 加群 V に対し，$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ は

$$\langle \rho^*(g)v^*, v\rangle = \left\langle g, \rho(g^{-1})v\right\rangle \quad (g \in G, v \in V, v^* \in V^*)$$

により G 加群になる．これを V の**双対表現**または**双対 G 加群**という．

さらに，G 加群 V, W に対し，$\mathrm{Hom}(V, W)$ も次により G 加群となる: $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対し

$$(g\phi)(v) := g\phi(g^{-1}v) \quad (v \in V)$$

$W = \mathbb{C}$ を自明な表現，i.e. $\forall w \in W$ に対し，$gw := w$ としたものが双対表現に他ならない．

問 3.1.4. V, W を G 加群とするとき，G 加群としての同型 $\mathrm{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$ がなりたつことを示せ．

問 3.1.5. G 加群 V に対し，$V^G := \{v \in V; gv = v\ (\forall g \in G)\}$ とおくとき，V^G は V の部分 G 加群であることを示せ．

問 3.1.6. $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W)^G$ を示せ．

3.2　完全可約性，Schur の補題

命題 3.2.1. G を有限群，V を G 加群，$W \subset V$ を部分 G 加群とするとき，部分 G 加群 $W' \subset V$ で $W \oplus W' = V$ を満たすものが存在する．

証明 . H を任意の G 不変なエルミート内積とする (cf. 問 3.2.3).

$$W^\perp := \{v \in V; H(v, w) = 0\ (\forall w \in W)\}$$

とおくと，$W^\perp$ は V の部分 G 加群で，かつ，$V = W \oplus W^\perp$ をみたす*[1]．　□

系 3.2.2. 有限群の任意の表現は既約表現の直和で表せる (この性質を**完全可約性**という)．すなわち，有限群の任意の表現は完全可約である．

*[1] V の H に関する正規直交基底で，始めの r 個が W の基底になっているもの $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ をとって証明する．

問 3.2.3. G を有限群，V を G 加群，H を勝手な V 上のエルミート内積とするとき，

$$H_G(v, w) := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} H(xv, xw)$$

は G 不変なエルミート内積であることを示せ．

　ただし，$H(v, w)$ が V 上のエルミート内積であるとは，

1. $H(\lambda u + \mu v, w) = \lambda H(u, w) + \mu H(v, w)$　$(u, v, w \in V; \lambda, \mu \in k)$
2. $H(w, v) = \overline{H(v, w)}$　$(v, w \in V)$
3. $H(v, v) \geqslant 0$ $(v \in V)$，かつ，$H(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

を満たすものをいう．

問 3.2.4. 複素数を成分とする n 次正方行列 A が

$$A^* A = AA^* = I \quad (A^* := \overline{A}^t)$$

をみたすとき，n 次**ユニタリ行列**という．$\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n)^t; z_i \in \mathbb{C}\}$ 上のエルミート内積 $(\cdot, \cdot)$ を

$$(z, w) := \sum_{i=1} z_i \overline{w_i}$$

で定義するとき，A がユニタリ行列であることと，すべての $z, w \in \mathbb{C}^n$ について $(Az, Aw) = (z, w)$ であることとは同値であることを示せ．

補題 3.2.5 (Schur の補題)**.** V, W を既約な G 加群，$\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ とすると，

1. ϕ は同型，または $\phi = 0$.
2. $V = W$ ならば $\phi = \lambda I$ $(\exists \lambda \in \mathbb{C})$.

証明． 1. V の既約性から，V の部分 G 加群 $\mathrm{Ker}\,\phi$ は，$= \{0\}$ または $= V$．$\mathrm{Ker}\,\phi = V \Leftrightarrow \phi = 0$ に注意．また前者 (i.e. ϕ : 単射) の場合，準同型定理により，$V \simeq \mathrm{Im}\,\phi$．$W$ の既約性より，W の部分 G 加群 $\mathrm{Im}\,\phi$ は $= \{0\}$ または $= W$．前者の場合，$V = \{0\}$ となり，$V \neq \{0\}$ に反する．$\mathrm{Im}\,\phi = W$ のとき，ϕ は全射となり，ϕ は同型.

　2. $\lambda \in \mathbb{C}$ を ϕ の固有値とすると，$\phi - \lambda I \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$, かつ，$\mathrm{Ker}\,(\phi - \lambda I) \neq \{0\}$．ゆえに 1. より $\mathrm{Ker}\,(\phi - \lambda I) = V$，すなわち，$\phi = \lambda I$．　□

3.3　例

Abel 群

　(ρ, V) を Abel 群 G の既約表現とする．$g \in G$ を任意に固定する．このとき，G の可換性から $\rho(g)\rho(x) = \rho(x)\rho(g)$ $(\forall x \in G)$. Schur の補題により，$\rho(g) = \lambda_g I$ $(\exists \lambda_g \in \mathbb{C})$. $V \ni v \neq 0$ を任意に一つとり固定する．$\rho(g)v = \lambda_g v \in \mathbb{C}v$ と V の既約性により $V = \mathbb{C}v$．特に $\dim V = 1$ で，$\rho : G \to \mathbb{C}^\times$.

3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$

$\mathfrak{S}_3$ の表現として次のものを考える:

- 自明表現 (trivial rep.) $U = \mathbb{C}$，i.e. $\sigma v = v\ (\sigma \in \mathfrak{S}_3, v \in U)$
- 符号表現 (alternating rep.) $U' = \mathbb{C}$，i.e. $\sigma v = (-1)^{\sigma} v\ (\sigma \in \mathfrak{S}_3, v \in U')$
- 標準表現 (standard rep.) $V := \left\{(z_1, z_2, z_3)^t \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_2 + z_3 = 0\right\}$ とおき，

$$\sigma(z_1, z_2.z_3)^t := (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)})^t \tag{3.3.1}$$

  と定義する．

いま，standard rep. V において，$\alpha = (\omega, 1, \omega^2)^t, \beta = (1, \omega, \omega^2)^t \in V$ とおけば

$$\begin{aligned}
(1,2,3)\alpha &= (\omega^2, \omega, 1)^t = \omega(\omega, 1, \omega^2)^t = \omega\alpha \\
(1,2,3)\beta &= (\omega^2, 1, \omega)^t = \omega^2(1, \omega, \omega^2)^t = \omega^2\beta \\
(1,2)\alpha &= (1, \omega, \omega^2)^t = \beta \\
(1,2)\beta &= (\omega, 1, \omega^2)^t = \alpha
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

に注意する．

§4 でこれら 3 つの $\mathfrak{S}_3$-加群は既約であることを示す．

さて，W を任意の $\mathfrak{S}_3$-module とする．$\tau = (1,2,3), \sigma = (1,2)$ とおくと，$\mathfrak{S}_3 = \langle \tau, \sigma \rangle$ で

$$\tau^3 = \sigma^2 = e, \quad \sigma\tau\sigma = \tau^2$$

となる．$\langle \tau \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は Abel 群であるから，$W = \bigoplus V_i$，$V_i = \mathbb{C}v_i$，$\tau v_i = \omega^{\alpha_i} v_i$ とかける．次に，$v \in W$ が τ について固有値 ω^i の固有ベクトル，i.e. $\tau v = \omega^i v$ とすると，

$$\tau(\sigma v) = \sigma(\tau^2 v) = \sigma(\omega^{2i} v) = \omega^{2i}\sigma v$$

となり，σv は τ について固有値 ω^{2i} の固有ベクトルとなる．

1. $\omega^i \neq 1$ のとき，$v, \sigma v$ は一次独立 (cf. 補題 3.3.1) なので，$V' := \langle v, \sigma v \rangle_{\mathbb{C}} \subset W$ とおくと，$v \leftrightarrow \alpha, \sigma v \leftrightarrow \beta$ により，$V' \simeq V$ (standard rep.).
2. $\omega^i = 1$ とする．
   (a) σv と v が一次独立でないとき，$\sigma v = \lambda v$ とかけて，$\lambda^2 = e$ より $\lambda = \pm 1$．$\lambda = 1$ のとき，$\langle v \rangle_{\mathbb{C}} = U$ (trivial rep.) で，$\lambda = -1$ のとき，$\langle v \rangle_{\mathbb{C}} = U'$ (alternating rep.).
   (b) σv と v が一次独立なとき，$\langle v + \sigma v \rangle_{\mathbb{C}} = U$ (trivial rep.). $\langle v - \sigma v \rangle_{\mathbb{C}} = U'$(alternating rep.).

まとめると，$\mathfrak{S}_3$ の既約表現は，自明表現 U，符号表現 U'，標準表現 V のいずれかに同値であることが (既約性の証明をのぞいて) わかった．

補題 3.3.1. $\phi \in \mathrm{End}(V)$ の固有値を $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,n}$，固有値 λ_i の固有ベクトルを v_i とする．このとき，$\lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j)$ ならば $v_1, \ldots, v_n$ は一次独立である．

証明． $c_1v_1 + \dots c_nv_n = 0$ とする．この両辺に ϕ^j $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ をほどこすと，$c_1\lambda_1^j v_1 + \cdots + c_n\lambda_n^j v_n = 0$．行列の形にかけば

$$(c_1v_1, c_2v_2 \dots, c_nv_n)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \dots, 0)$$

左辺の行列について，その行列式は $\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)$ に等しく[*2]，これは仮定により $\neq 0$，よって可逆．$\therefore c_1v_1 = \cdots = c_nv_n = 0$．$\therefore c_1 = \cdots = c_n = 0$． □

4　指標

4.1　指標

G の表現 (ρ, V) に対し, G 上の函数 $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ が G の**指標**である $\overset{\text{def.}}{\iff} \chi_V(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$ (= 線形写像 $\rho(g) : V \to V$ の "トレース")

問 4.1.1. A, B を n 次正方行列とするとき，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を示せ．

上の問から，特に $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$ となり，χ_V は G の共役類上の函数である．一般に G の共役類上の函数を**類函数**という．また

$$V \simeq W \Rightarrow \chi_V = \chi_W, \qquad \chi_V(e) = \dim V$$

にも注意．実は逆に，$\chi_V = \chi_W \Rightarrow V \simeq W$ が成り立つ．つまり，有限群の表現は指標により (同型を除き) 決まってしまう (cf. 系 4.2.5).

いま，行列 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ の固有値を重複を繰り返して並べたものを $\{\lambda_i\}$ とする:

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{4.1.1}$$

$\therefore \mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. 従って，$\chi_V(g)$ は線形写像 $g|_V$ の固有値の総和に他ならない．さらに，$g|_V$ は，V 上のある内積に関してユニタリ変換であるから (cf. 問 3.2.3 および問 3.2.4)，V の正規直交基底に関して対角化できる (つまり，基底として，固有ベクトルからなるものをとれる) ことに注意する．

命題 4.1.2. V, W を G 加群とすると，

1. $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$，$\chi_{V\otimes W} = \chi_V\chi_W$，$\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$
2. $\chi_{\bigwedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$，$\chi_{\mathrm{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2))$,

[*2] この行列式は Van der Monde 行列式と呼ばれる．

証明． 1. $g \in G$ を固定するとき，線形写像 $g|V, g|W$ の固有値をそれぞれ $\{\lambda_i\}, \{\mu_j\}$ とすると，$g|_{V\oplus W}$ の固有値は $\{\lambda_i\} \cup \{\mu_j\}$，$g|_{V\otimes W}$ の固有値は $\{\lambda_i\mu_j\}$[*3] となる．ゆえに $\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$，$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g)$．次に，線形写像 g は何回かほどこすと恒等写像になるから $|\lambda_i| = 1$ であることに注意すると，V^* 上での固有値は $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$ であるから[*4]，$\therefore \chi_{V^*} = \overline{\chi}_V$．

2. また $\bigwedge^2 V$ 上での g の作用の固有値は $\{\lambda_i\lambda_j; i < j\}$ で，$\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}((\sum \lambda_i)^2 - \sum \lambda_i^2)$. g^2 の V 上での作用は λ_i^2 であるから

$$\chi_{\bigwedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)).$$

同様に，$\mathrm{Sym}^2 V$ 上での g の作用の固有値は $\{\lambda_i^2 (i = 1, 2, \dots); \lambda_i\lambda_j (i < j)\}$ で，$\sum_i \lambda_i^2 + \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}((\sum \lambda_i)^2 + \sum \lambda_i^2)$.

$$\therefore \chi_{\mathrm{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)).$$

□

有限群 G が有限集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ に置換群として作用するとき，G の表現 (ρ, V) を次のように定義する: X の元の数だけ記号 $\{e_{x_i}\}_{i=1,\dots,n}$ を用意し，$V := \mathbb{C}e_{x_1} + \cdots + \mathbb{C}e_{x_n}$ とし，各 $g \in G$ に対し，線形写像 $\rho(g) : V \to V$ を $\rho(g)e_{x_i} = e_{gx_i}$ により定義する．(ρ, V) を G の**置換表現**という．特に $X = G$ とした置換表現を G の**正則表現**といい，R_G であらわす[*5]．

例 4.1.3. $n = 3$，$X = \{1, 2, 3\}$，$G = \mathfrak{S}_3$

$$\rho(213) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rho(132) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho(231) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

etc.

命題 4.1.4. V を G の置換表現とするとき，$\chi_V(g) = \#\{x \in X; gx = x\}$.

$\mathfrak{S}_3$ の指標表

(i) χ は類函数

(ii) $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_3$ が共役 $\Leftrightarrow \sigma, \tau$ の型が一致

より，各共役類 $[e], [(1,2)], [(1,2,3)]$ での指標の値を求める:

[*3] $v \in V, w \in W$ を固有値が λ, μ である g の固有ベクトルとすると，$g(v \otimes w) = gv \otimes gw = \lambda v \otimes \mu w = \lambda\mu v \otimes w$，すなわち $v \otimes w$ は固有値 $\lambda\mu$ の固有ベクトル．

[*4] $\{v_i\}$ を固有値が λ_i の固有ベクトルからなる V の基底，$\{f_j\}$ をその双対基底とすると，$\forall v = \sum_i c_i v_i$ に対し，$\left\langle g.f_j, v\right\rangle = \sum_i c_i \left\langle g.f_j, v_i\right\rangle = \sum_i c_i \left\langle f_j, g^{-1}.v_i\right\rangle = \sum_i c_i \left\langle f_j, \lambda_i^{-1} v_j\right\rangle = \sum_i c_i \lambda_i \delta_{ij} = \left\langle \lambda_j^{-1} f_j, v\right\rangle$. $\therefore g.f_j = \lambda_j^{-1} f_j$.

[*5] $e_g \leftrightarrow \delta_g$ により，$R_G \simeq \{\phi : G \to \mathbb{C}\}$ as G-module.

$\mathfrak{S}_3$	1 $[e]$	3 $[(1,2)]$	2 $[(1,2,3)]$
trivial U	1	1	1
alternating U'	1	-1	1
standard V	2	0	-1

実際，$\mathbb{C}^3 = U \oplus V$ (ただし $\mathbb{C}^3$ は $\mathfrak{S}_3$ の置換表現) より，

$$\chi_{\mathbb{C}^3} = (3,1,0) \qquad \therefore \chi_V = \chi_{\mathbb{C}^3} - \chi_U = (3,1,0) - (1,1,1) = (2,0,-1).$$

また，$\mathbb{C}^3 = U \oplus V$ となることは，まず permutation rep. について，$\sigma v = \sum_i z_i e_{\sigma(i)} = \sum_j z_{\sigma^{-1}(j)} e_j$ より，$\sigma|_V =$ standard rep., $U := V^{\perp} = \{(t,t,t); t \in \mathbb{C}\}$ とおくと，$\sigma|_U =$ trivial rep. で $\mathbb{C}^3 = V \oplus U$.

4.2　射影公式

有限群 G とその表現 V に対し，$V^G = \{v \in V; gv = v\ (\forall g \in G)\}$

$$\varphi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathrm{End}(V) \tag{4.2.1}$$

とおくとき，$g_1 \in G, v \in V$ に対し，

$$\begin{aligned} \varphi(g_1 v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_1(gv) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hv \\ &= \varphi(v) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} g_1 \varphi(v) &= g_1\Big(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv\Big) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_1(gv) \\ &= \varphi(v) \qquad (4.2.2) \\ \therefore g^{-1}\varphi(gv) &= g^{-1}\varphi(v) = \varphi(v), \quad \text{i.e.} \quad g^{-1}\varphi g = \varphi \quad (\forall g \in G) \end{aligned}$$

特に

命題 4.2.1. $\varphi : V \twoheadrightarrow V^G$ は onto-projection.

証明． $\varphi(v) \in V^G$ は (4.2.2) で示した．逆に，$v \in V^G$ ならば $gv = v\ (\forall g \in G)$ より，$v = \frac{1}{|G|} \sum gv = \varphi(v)$. $\therefore v \in \mathrm{Im}\,\varphi, \varphi^2 = \varphi$. □

V の中に自明表現が何個あるか，i.e. $\dim V^G$ は

$$\dim V^G = \mathrm{tr}\,\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}\, g = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \tag{4.2.3}$$

で求められる[*6].

特に，V: 既約，$\neq$ (trivial rep.) のとき，$V^G = \{0\}$ であるから，$\sum_{g \in G} \chi_V(g) = 0$.

さらに，G-modules V, W に対し，$\mathrm{Hom}(V, W)$ はまた G-module であり，

$$\mathrm{Hom}(V, W)^G = \mathrm{Hom}_G(V, W)$$

に注意する. V, W ともに既約ならば，Schur の補題により

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \\ 0 & \text{if } V \not\simeq W. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

$\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ より $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \overline{\chi_V(g)}\chi_W(g)$ に注意すれば，(4.2.3),(4.2.4) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) \\ &= \dim \mathrm{Hom}(V, W)^G \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } V \simeq W \\ 0 & \text{if } V \not\simeq W. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

G 上の class functions の空間 $C_{\mathrm{class}}(G)$ に (エルミート) 内積 $(\cdot, \cdot)$ を

$$(\alpha, \beta) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)}\beta(g) \tag{4.2.6}$$

で定義する．このとき (4.2.5) は，以下のように言い表せる.

定理 4.2.2. 有限群 G の既約表現の指標は，内積 (4.2.6) に関して 直交している.

系 4.2.3. V: irrep. $\Leftrightarrow (\chi_V, \chi_V) = 1$

証明 . $\Rightarrow$: (4.2.5).

$\Leftarrow$: $V = \bigoplus_i a_i V_i$ を V の既約分解，i.e. V_i: 互いに同値でない G の既約表現，$a_i \in \mathbb{N}$，とすると，$\chi_V = \sum_i a_i \chi_{V_i}$. $1 = (\chi_V, \chi_V) = \sum_i a_i^2$ より，ある一つの i についてのみ $a_i = 1$ で，他はすべて 0. □

系 4.2.4. V_i: irrep. とするとき，V における V_i の重複度 $\mathrm{mult}_V(V_i)$ は，$\mathrm{mult}_V(V_i) = (\chi_V, \chi_{V_i})$ で与えられる.

系 4.2.5. $\chi_V = \chi_W \Rightarrow V \simeq W$.

[*6] $p : V \to V$; linear s.t. $p^2 = p$ に対し，$W := \mathrm{Im}\, p, W' := \mathrm{Im}\,(1_v - p)$ とおくとき，$V = W \oplus W'$ を示したい.

実際，$\forall v \in V$ は $v = v - p(v) + p(v) \in W' + W$ とかけるので $V = W + W'$.

次に $W' \subset \mathrm{Ker}\, p$ ($\because w \in W'$ ならば $w = y - p(y)$ $(\exists y \in V)$ で，$p(w) = p(y) - p^2(y) = p(y) - p(y) = 0$) に注意して，$v \in W \cap W'$ とすると，$v \in W$ より $v = p(x)$ $(\exists x \in V)$，一方，$v \in W' \subset \mathrm{Ker}\, p$ より $0 = p(v) = p^2(x) = p(x) = v$. $\therefore V = W \oplus W'$.

明らかに, $p|_W = 1_W, p|_{W'} = 0$. そこで V の basis として $\{\underbrace{v_1, \ldots, v_r}_{W \text{ の basis}}, \underbrace{v_{r+1}, \ldots, v_n}_{W' \text{の basis}}\}$ をとれば, $\mathrm{tr}\, p = \dim W$.

証明． $V = \bigoplus_i a_i V_i$, $W = \bigoplus_i b_i V_i$ を既約分解とすると，$\chi_V = \chi_W \Leftrightarrow (\chi_V, \chi_{V_i}) = (\chi_W, \chi_{V_i})\ (\forall i) \Leftrightarrow a_i = b_i\ (\forall i) \Leftrightarrow V \simeq W$ □

最後の系から

$$\begin{aligned}\#\{\text{irrep. of } G\} &\leqslant \#\{\text{一次独立な } G \text{ 上の class function}\}\\ &= \#\{\text{conjugacy class in } G\}\end{aligned}$$

がわかる．

$R = R_G$ を G の正則表現とすると，命題 4.1.4 より

$$\chi_R(g) = \begin{cases} 0 & \text{if } g \neq e \\ |G| & \text{if } g = e \end{cases}$$

ゆえに，$G \neq \{e\}$ ならば R は既約でない．また $\{V_i\}$ を G の既約表現の同値類全体のなす族とし，$R = \bigoplus_i a_i V_i$ とすると，$a_i = (\chi_{V_i}, \chi_R) = \frac{1}{|G|}\chi_{V_i}(e)\chi_R(e) = \dim V_i$ であるから，

系 4.2.6. G の任意の既約表現 V は，R の中に $\dim V$ 回現れる (i.e. V の R における重複度は $\dim V$).

特にこのことから，G の既約表現の個数は有限であることが再び従う．実際，$\chi_R(e) = |G|$ より

$$|G| = \dim R = \sum_i a_i \chi_{V_i}(e) = \sum_i (\dim V_i)^2 \tag{4.2.7}$$

また $\chi_R(g) = 0 (g \neq e)$ より

$$0 = \sum_i (\dim V_i)\chi_{V_i}(g) \quad (g \neq e) \tag{4.2.8}$$

これら 2 つの式から，Fourier 逆公式[*7] が従う．

4.3　射影公式 2

G 上の函数 $\alpha : G \to \mathbb{C}$ を考える．G-module V に対し，

$$\varphi_{\alpha,V} := \sum_{g\in G} \alpha(g) g : V \to V$$

とおく．このとき，

[*7] G の既約表現の同値類全体を $\hat{G}$ と記す．G の表現 $\rho : G \to GL(V_\rho)$ と G 上の函数 φ に対し，その Fourier 変換 $\hat{\varphi} : \hat{G} \to \mathrm{End}(V_\rho)$ を

$$\hat{\varphi}(\rho) = \sum_{g\in G} \varphi(g)\rho(g)$$

で定義するとき，次の Fourier 逆公式が成り立つ:

$$\varphi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in\hat{G}} \dim V_\rho \cdot \mathrm{tr}\left(\rho(g^{-1})\hat{\varphi}(\rho)\right)$$

ここで，和 $\sum_{\rho\in\hat{G}}$ は G の既約表現の同値類全体 $\hat{G}$ の上をわたる．

命題 4.3.1. α: class function $\Leftrightarrow$ 任意の G-module V に対し，$\varphi_{\alpha,V} \in \mathrm{Hom}_G(V,V)(=: \mathrm{End}_G(V))$.

証明 . $\Rightarrow$: $h \in G$ を任意に固定するとき，

$$\varphi_{\alpha,V}(hv) = \sum_g \alpha(g)\, g(hv) = \sum_g \alpha(g)\,(gh)v$$

g を hgh^{-1} で置き換えて

$$\begin{aligned} &= \sum_g \alpha(hgh^{-1})\,(hgh^{-1}h)v = h\sum_g \alpha(hgh^{-1})gv \\ &= h\varphi_{\alpha,V}(v) \qquad (\forall v \in V) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: “α が class function でない $\Rightarrow \exists V$: G-module s.t. $\varphi_{\alpha,V} \notin \mathrm{End}_G(V)$” を示す.

$V := \{v : G \to \mathbb{C};\text{function}\}$, $(gv)(x) := v(g^{-1}x)$ とおく．α は class function でないから，$\exists g_1, g_2, h \in G$ s.t. $g_2 = hg_1h^{-1}$ and $\alpha(g_1) \neq \alpha(g_2)$. $\delta_{g_2^{-1}} \in V$ を

$$\delta_{g_2^{-1}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq g_2^{-1} \\ 0 & \text{if } x = g_2^{-1} \end{cases}$$

で定めると，

$$\begin{aligned} (\varphi_{\alpha,V}\delta_{g_2^{-1}})(e) &= \sum_g \alpha(g)\,(g\delta_{g_2^{-1}})(e) = \sum_g \alpha(g)\,\delta_{g_2^{-1}}(g^{-1}) \\ &= \alpha(g_2). \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned} ((h\varphi_{\alpha,V}h^{-1})\delta_{g_2^{-1}})(e) &= \sum_g \alpha(g)\,(hgh^{-1}\delta_{g_2^{-1}})(e) = \sum_g \alpha(g)\,\delta_{g_2^{-1}}((hgh^{-1})^{-1}) \\ &= \alpha(g_1). \end{aligned}$$

ゆえに $\varphi_{\alpha,V} \notin \mathrm{End}_G(V)$. □

命題 4.3.2. $\#\{\text{irrep. of } G\} = \#\{\text{conjugacy class in } G\}$，i.e. $\{\chi_V; V : \text{irrep. of } G\}$ は $C_{\text{class}}(G)$ の正規直交基底.

証明 . $C_{\text{class}}(G)(=: U$ と以下では記す$)$ の元 α が，$(\alpha, \chi_V) = 0$ ($\forall V$: irrep.) を満たすとする. $\varphi_{\alpha,V} = \sum_g \alpha(g)\, g$ は $\in \mathrm{End}_G(V)$ (命題 4.3.1) であるから，Schur の補題より $\varphi = \lambda 1_V$ $(\exists\lambda)$. $n = \dim V$ とおくと，

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{n}\operatorname{tr}\varphi_{\alpha,V} = \frac{1}{n}\sum \alpha(g)\chi_V(g) \\ &= \frac{1}{n}\sum \alpha(g)\overline{\chi_{V^*}(g)} = \frac{|G|}{n}(\chi_{V^*}, \alpha) \\ &= 0 \qquad\qquad (\because V^* : \text{irrep.}) \\ \therefore\ \varphi_{\alpha,V} &= 0,\ \text{i.e.}\ \sum \alpha(g)\, g = 0 \qquad\qquad (\forall V : \text{irrep.}) \end{aligned}$$

特に $V = R$ (regular rep.) とすると，$g : R \to R$ は $\mathrm{End}(R)$ の中で一次独立[*8]，ゆえに $\alpha(g) = 0$ $(\forall g \in G)$．i.e. $\alpha = 0$.

以上のことをまとめれば，

$$W := \langle \chi_V ; V : \text{irrep. of } G \rangle_{\mathbb{C}}, \quad W^{\perp} := \{w \in U ; (w, v) = 0\ (\forall v \in U)\}$$

とするとき，

$$W^{\perp} = \{0\},$$

すなわち $U = W \oplus W^{\perp} = W$．特に $\dim U = \dim W$ で，$\dim U = \#\{\text{conjugacy class in } G\}$, $\dim W = \#\{\chi_V ; V : \text{irrep. of } G\} = \#\{\text{irrep. of } G\}$. □

$\mathfrak{S}_4$ の指標表

	1	6	8	6	3
$\mathfrak{S}_4$	$[e]$	$[(1,2)]$	$[(1,2,3)]$	$[(1,2,3,4)]$	$[(1,2)(3,4)]$
trivial U	1	1	1	1	1
alternating U'	1	-1	1	-1	1
standard V	3	1	0	-1	-1
$V' = V \otimes U'$	3	-1	0	1	-1
W	2	0	-1	0	2

<u>standard V</u>

$\mathfrak{S}_3$ の場合と同様，$\mathbb{C}^4 = V \oplus U$．$\therefore\ \chi_V = \chi_{\mathbb{C}^4} - \chi_U = (4,2,1,0,0) - (1,1,1,1,1) = (3,1,0,-1,-1)$.

また (4.2.7) より $24 = 1 + 1 + 3^2 + (\dim V_1)^2 + (\dim V_2)^2$，$(\dim V_1)^2 + (\dim V_2)^2 = 13$ となる既約表現があと 2 つ存在する ($\because$ #{ irrep. } = #{ 共役類 })，ゆえにそれらの次元はそれぞれ $2, 3$ である．

そこで今，$V' := V \otimes U'$ とおけば，$\chi_{V'} = \chi_V \chi_{U'} = (3,-1,0,1,-1)$ となるが，これは既約．実際，

$$\begin{aligned}(\chi_{V'}, \chi_{V'}) &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_4|} \sum_{\sigma} \overline{\chi_{V'}(\sigma)} \chi_{V'}(\sigma) \\ &= \frac{1}{24}(3^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 6 + 0^2 \cdot 8 + 1^2 \cdot 6 + (-1)^2 \cdot 3) \\ &= 1.\end{aligned}$$

もう一つ 2 次元の既約表現があるはずで，それを例えば W とする．χ_W を求めよう．(4.2.8) より

- <u>$\sigma = (1,2)$</u>　$\underset{U}{1 \cdot 1} + \underset{U'}{1 \cdot (-1)} + \underset{V}{3 \cdot 1} + \underset{V'}{3 \cdot (-1)} + 2\chi_W(1,2)$　　$\therefore \chi_W(1,2) = 0$

[*8] $\sum_g c_g g = 0$ in $\mathrm{End}(R)$ とする．両辺を $\delta_e \in R$ にほどこせば，$\forall x \in G$ に対し，$0 = (\sum_g c_g g)\delta_e(x) = c_x$.

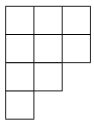
- $\underline{\sigma = (1,2,3)}$ $\;1\underset{U}{\cdot}1 + 1\underset{U'}{\cdot}1 + 0\underset{V}{\cdot}3 + 0\underset{V'}{\cdot}3 + 2\chi_W(1,2,3) \qquad \therefore \chi_W(1,2,3) = -1$
- $\underline{\sigma = (1,2)}$ $\;1\underset{U}{\cdot}1 + 1\cdot\underset{U'}{(-1)} + 3\cdot\underset{V}{(-1)} + 3\underset{V'}{\cdot}1 + 2\chi_W(1,2,3,4) \qquad \therefore \chi_W(1,2,3,4) = 0$
- $\underline{\sigma = (1,2)(3,4)}$ $\;1\underset{U}{\cdot}1 + 1\underset{U'}{\cdot}1 + 3\cdot\underset{V}{(-1)} + 3\cdot\underset{V'}{(-1)} + 2\chi_W((1,2)(3,4)) \quad \therefore \chi_W(1,2) = 2$

5　Specht 加群

5.1　Young 部分群，Young 盤，タブロイド

定義 5.1.1. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ が n の分割である $\overset{\text{def.}}{\iff} \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_l > 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$
このとき $\lambda \vdash n, |\lambda| = n$ etc. とかく．

例 **5.1.2.** 分割 $\lambda = (3,3,2,1)$ に，図形

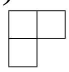


を対応させ，これを λ に対応する *Young* **図形**という．分割 λ に対応する Young 図形も λ とかく．

定義 5.1.3. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n$ に対し，$\mathfrak{S}_n$ の部分群 *Young* **部分群** $\mathfrak{S}_\lambda$ を

$$\mathfrak{S}_\lambda := \mathfrak{S}_{\{1,\ldots,\lambda_1\}} \times \mathfrak{S}_{\{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\{\lambda_1+\cdots+\lambda_{l-1}+1,\ldots,n\}}$$

で定義する[*9]．たとえば $\mathfrak{S}_{(3,3,2,1)} = \mathfrak{S}_{\{1,2,3\}} \times \mathfrak{S}_{\{4,5,6\}} \times \mathfrak{S}_{\{7,8\}} \times \mathfrak{S}_{\{9\}}$.

定義 5.1.4. $\lambda \vdash n$ とする．型 (shape)λ の *Young* **盤** *(Yonug tableau)* t^λ とは，Young 図形 λ に番号 1 から n までを過不足なく入れたものをいう．たとえば型  の Young 盤は

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 1&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 1&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$$

の 3! 個ある．以下，Young 盤 t の型を $\operatorname{sh} t$ と書く．

定義 5.1.5. $\lambda \vdash n$ に対し，λ-**タブロイド** *(λ-tabloid)* とは，型 λ の Young 盤 t^λ の同値類 $\{t\}$ のことをいう．ただし，型 λ の Young 盤 t, t' が同値 $\overset{\text{def.}}{\iff} t, t'$ の各行に並ぶ数字の集合が同一．

たとえば，$t = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$ と同値な Young 盤は $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$.

$$\therefore \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}$$

[*9] 群 G の部分群の族 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ が，“$i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \{e\}$” を満たすとき，その直積群 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_k$ は，$(g_1, g_2, \ldots, g_k) \mapsto g_1 g_2 \cdots g_k$ により G の部分群とみなせる．

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$ ならば，t^λ と同値な Young 盤は $\lambda_1!\lambda_2!\dots\lambda_l!(=: \lambda!)$ 個だけある．従って，λ-tabloid の個数は $n!/\lambda!$ である．

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の t^λ ($\lambda \vdash n$) への作用を

$$\sigma.t^\lambda := (\sigma(t_{ij})) \qquad t^\lambda = (t_{ij})$$

で定める[*10]．たとえば，$(1,2,3).\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$.

さらに $\sigma.\{t\} := \{\sigma.t\}$ と定義する．これは well defined．実際，$t \sim t' \Leftrightarrow t_{i,\bullet} = t'_{i,\bullet}$ ($\forall i$) より $\sigma(t_{i,\bullet}) = \sigma(t'_{i,\bullet})$.

5.2 Specht 加群

定義 5.2.1. Young 盤 t が行 (row) $R_1, R_2, \dots, R_l$，列 (column) $C_1, C_2, \dots, C_k$ をもつとき，

$$R_t := \mathfrak{S}_{R_1} \times \mathfrak{S}_{R_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{R_l}$$
$$C_t := \mathfrak{S}_{C_1} \times \mathfrak{S}_{C_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{C_k}$$

をそれぞれ t の *row stabilizer*, *column stabilizer* という．$\{t\} = R_t t$ とかけることに注意.

たとえば $t = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$ のとき

$$R_t = \mathfrak{S}_{\{1,2,4\}} \times \mathfrak{S}_{\{3,5\}}, \quad C_t = \mathfrak{S}_{\{3,4\}} \times \mathfrak{S}_{\{1,5\}} \times \mathfrak{S}_{\{2\}}.$$

一般に，$\mathfrak{S}_n$ の部分集合 H に対し，

$$H^+ := \sum_{\sigma \in H} \sigma, \quad H^- := \sum_{\sigma \in H} (-1)^\sigma \sigma \qquad (\in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n])$$

とおき[*11]，さらに，

$$\kappa_t := C_t^- = \sum_{\sigma \in C_t} (-1)^\sigma \sigma$$

とおく．Young 盤 t が列 $C_1, C_2, \dots, C_k$ をもつならば，$\kappa_t = \mathfrak{S}_{C_1}^- \mathfrak{S}_{C_2}^- \cdots \mathfrak{S}_{C_k}^-$ となる．実際，脚注*9 より，

$$\begin{aligned}\kappa_t = C_t^- &= \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_k) \in \mathfrak{S}_{C_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{C_k}} (-1)^{\sigma_1 \cdots \sigma_k} \sigma_1 \cdots \sigma_k \\ &= \Big(\sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{C_1}} (-1)^{\sigma_1} \sigma_1 \Big) \cdots \Big(\sum_{\sigma_k \in \mathfrak{S}_{C_k}} (-1)^{\sigma_k} \sigma_k \Big) \\ &= \mathfrak{S}_{C_1}^- \mathfrak{S}_{C_2}^- \cdots \mathfrak{S}_{C_k}^-\end{aligned}$$

[*10] $\sigma.t^\lambda$ の第 i 行第 j 列のマスには，数字 $\sigma(t_{ij})$ が入る．

[*11] 一般に群 G に対し，有限和 $\sum_{g \in G} a_g g$ ($a_g \in \mathbb{C}$) の全体を考え，これらの間の和および積を

$$\sum a_g g + \sum b_g g := \sum (a_g + b_g) g, \quad \Big(\sum a_g g\Big)\Big(\sum b_g g\Big) := \sum c_g g \quad (\text{ただし}, c_g = \sum_{xy=g} a_x b_y)$$

で定義したものを G の**群環** *(group algebra)* と呼び，$\mathbb{C}[G]$ で表す．

定義 5.2.2. 分割 λ に対し，

$$M^\lambda := \mathbb{C}\text{-}\operatorname{Span}\langle \{t\}; \operatorname{sh} t = \lambda \rangle = \bigoplus_{\operatorname{sh} t = \lambda} \mathbb{C}\{t\}$$

とおく．また λ-tableau t に対し，$\mathbf{e}_t := \kappa_t\{t\} \in M^\lambda$ とおく．M^λ を置換加群 *(permutation module)*，$\mathbf{e}_t$ を *polytabloid* という．

例 5.2.3. $t = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$ のとき

$$\begin{aligned}
\kappa_t &= C^-_{\{3,4\}} C^-_{\{1,5\}} C^-_{\{2\}} \\
&= (e - (3,4))(e - (1,5))e \\
&= e - (3,4) - (3,4)(1,5) + (3,4)(1,5) \\
\therefore \mathbf{e}_t &= \left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 5 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \cline{1-2}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 \\ \cline{1-2}\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

補題 5.2.4. $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，

1. $R_{\sigma t} = \sigma R_t \sigma^{-1}$
2. $C_{\sigma t} = \sigma C_t \sigma^{-1}$
3. $\kappa_{\sigma t} = \sigma \kappa_t \sigma^{-1}$
4. $\mathbf{e}_{\sigma t} = \sigma \mathbf{e}_t$

がなりたつ．

証明 . 1. $g \in R_{\sigma t} \Leftrightarrow g\{\sigma t\} = \{\sigma t\} \Leftrightarrow \sigma^{-1} g \sigma\{t\} = \{t\} \Leftrightarrow \sigma^{-1} g \sigma \in R_t \Leftrightarrow g \in \sigma R_t \sigma^{-1}$.

2. $g \in C_{\sigma t} \Leftrightarrow g \in R_{(\sigma t)'}$[*12] に注意すると，1. より $g \in R_{(\sigma t)'} = R_{\sigma t'} \Leftrightarrow \sigma^{-1} g \sigma \in R_{t'}$ $\therefore \sigma g \sigma^{-1} \in C_t$.

3. 2. より

$$\begin{aligned}
\kappa_{\sigma t} &= \sum_{\pi \in C_{\sigma t}} (-1)^\pi \pi = \sum_{\pi \in \sigma C_t \sigma^{-1}} (-1)^\pi \pi \\
&= \sum_{\pi \in C_t} (-1)^\pi \sigma \pi \sigma^{-1} = \sigma \Big(\sum_{\pi \in C_t} (-1)^\pi \pi \Big) \sigma^{-1} \\
&= \sigma \kappa_t \sigma^{-1}.
\end{aligned}$$

4. 3. より $\mathbf{e}_{\sigma t} = \kappa_{\sigma t}\{\sigma t\} = \sigma \kappa_t \sigma^{-1}\{\sigma t\} = \sigma \kappa_t \{t\} = \sigma \mathbf{e}_t$. □

定義 5.2.5. 分割 $\lambda \vdash n$ に対し，

$$S^\lambda := \mathbb{C}\text{-}\operatorname{Span}\langle \mathbf{e}_t; \operatorname{sh} t = \lambda \rangle = \bigoplus_{\operatorname{sh} t = \lambda} \mathbb{C}\mathbf{e}_t \subset M^\lambda$$

を *Specht* 加群という．$\sigma \mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{\sigma t}$ であるから $S^\lambda \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\mathbf{e}_t$ に注意.

[*12] t' により，Young 盤 t' の共役，i.e. t を対角線に関して折り返してできる Young 盤を表す.

例 **5.2.6.** $\lambda = (n)$ のとき，$t = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdot & \cdot & n \\ \hline\end{array}$ で $C_t = \{e\}$ であるから，$\mathbf{e}_t = \{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdot & \cdot & n \\ \hline\end{array}\}$．また $\forall\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，

$$\begin{aligned}
\sigma\mathbf{e}_t &= \mathbf{e}_{\sigma t} \\
&= \left\{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \sigma(1) & \sigma(2) & \cdot & \cdot & \sigma(n) \\ \hline\end{array}\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdot & \cdot & n \\ \hline\end{array}\right\} \\
&= \mathbf{e}_t.
\end{aligned}$$

ゆえに $S^{(n)} = U$ (trivial rep.).

例 **5.2.7.** $\lambda = (1^n)$ のとき，$t = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline n \\ \hline\end{array}$ で $C_t = \mathfrak{S}_n$ であるから，

$$\mathbf{e}_t = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{\pi}\pi\{t\}$$

ゆえ，$\forall\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，

$$\begin{aligned}
\sigma\mathbf{e}_t &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{\sigma\pi}\sigma\pi\{t\} \times (-1)^{\sigma} \\
&= (-1)^{\sigma} \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{\pi}\pi\{t\} \\
&= (-1)^{\sigma}\mathbf{e}_t.
\end{aligned}$$

ゆえに $S^{(1^n)} = U'$ (alternating rep.).

例 **5.2.8.** $n = 3, \lambda = (2, 1)$ のとき

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\substack{1\,2\\3\,\,}} &= \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} =: v_3 - v_1 \\
\mathbf{e}_{\substack{1\,3\\2\,\,}} &= \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} =: v_2 - v_1 \\
\mathbf{e}_{\substack{2\,1\\3\,\,}} &= \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = v_3 - v_2 = \mathbf{e}_{\substack{1\,2\\3\,\,}} - \mathbf{e}_{\substack{1\,3\\2\,\,}} \\
\mathbf{e}_{\substack{2\,3\\1\,\,}} &= \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = v_1 - v_2 = -\mathbf{e}_{\substack{1\,3\\2\,\,}} \\
\mathbf{e}_{\substack{3\,1\\2\,\,}} &= \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = v_2 - v_3 = -\mathbf{e}_{\substack{1\,2\\3\,\,}} + \mathbf{e}_{\substack{1\,3\\2\,\,}} \\
\mathbf{e}_{\substack{3\,2\\1\,\,}} &= \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = v_1 - v_3 = -\mathbf{e}_{\substack{1\,2\\3\,\,}}
\end{aligned}$$

ただし，$v_i = \begin{array}{|c|c|}\hline \cdot & \cdot \\ \hline i \\ \cline{1-1}\end{array}$ とおいた．$\therefore S^{(2,1)} = \mathbb{C}\text{- Span}\left\langle \mathbf{e}_{\substack{1\,2\\3\,\,}}, \mathbf{e}_{\substack{1\,3\\2\,\,}} \right\rangle$.

5.3 部分加群定理

補題 **5.3.1** (Sign Lemma). $H \subset \mathfrak{S}_n$ を部分群とする．

1. $\pi \in H$ ならば $\pi H^- = H^- \pi = (-1)^\pi H^-$
2. $u, v \in M^\lambda$ に対し，$\langle H^- u, v\rangle = \langle u, H^- v\rangle$[*13]
3. 互換 $(b, c) \in H$ ならば，$H^- = k(e - (b, c))$ $(\exists k \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n])$.
4. tableau t のある同一行に b, c が含まれ，かつ，$(b, c) \in H$ ならば，$H^-\{t\} = 0$.

証明 . 1. $\pi H^- = \pi \sum_{\sigma\in H}(-1)^\sigma \sigma = \sum_\sigma (-1)^\sigma \pi\sigma = \sum_{\sigma'}(-1)^{\pi\sigma'}\sigma' = (-1)^\pi H^-$. $H^-\pi = (-1)^\pi H^-$ も同様.

2. $u = \sum c_{\{t\}}\{t\}, v = \sum d_{\{s\}}\{s\}$ とすると，

$$\begin{aligned}\langle H^- u, v\rangle &= \sum_{\pi\in H}(-1)^\pi \langle \pi u, v\rangle \\ &= \sum_\pi (-1)^\pi \sum_{\{t\},\{s\}} c_{\{t\}} d_{\{s\}} \langle \pi\{t\}, \{s\}\rangle = \sum_\pi (-1)^\pi \sum_{\{t\},\{s\}} c_{\{t\}} d_{\{s\}} \delta_{\pi\{t\},\{s\}} \\ &= \sum_\pi (-1)^\pi \sum_{\{t\},\{s\}} c_{\{t\}} d_{\{s\}} \delta_{\{t\},\pi^{-1}\{s\}} \\ &= \cdots = \langle u, H^- v\rangle\end{aligned}$$

3. $K = \langle e, (b, c)\rangle = \{e, (b, c)\} \subset H$ とおくと，$H = \coprod_i k_i K$ $(\exists\{k_i\} \in H)$ と disjoint union でかける．このとき，$H^- = (\sum_i \pm k_i)(e - (b, c))$.

4. 仮定より $(b, c)\{t\} = \{t\}$. $\therefore H^-\{t\} = k(e - (b, c))\{t\} = k(\{t\} - \{t\}) = 0$. □

定義 5.3.2. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \vdash n$ に対し，任意の i について

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$$

がなりたつとき，λ は μ に**支配的** *(dominant)* といい，$\lambda \trianglerighteq \mu$ とかく．ただし $i > l$ (または $i > m$) のとき $\lambda_i = 0$ (または $\mu_i = 0$) とする.

例 5.3.3. 6 の分割 $(3, 3), (2, 2, 1, 1)$ について $(3, 3) \trianglerighteq (2, 2, 1, 1)$ である．実際

$$3 \geqslant 2, \quad 3 + 3 \geqslant 2 + 2, \quad 3 + 3 + 0 \geqslant 2 + 2 + 1, \quad 3 + 3 + 0 + 0 \geqslant 2 + 2 + 1 + 1.$$

また $(3, 3)$ と $(4, 1, 1)$ については

$$3 \leqslant 4, \quad 3 + 3 \geqslant 4 + 1$$

より比較不能.

補題 5.3.4 (Dominance Lemma). t^λ, s^μ をそれぞれ λ-, μ-tableaux とする．各番号 i について，s^μ の第 i 行に含まれる数字が，常に t^λ の相異なる列に含まれるならば，$\lambda \trianglerighteq \mu$ である.

証明 . $s^\mu =: s$ の 1 行目に含まれる数字は $t^\lambda =: t$ の相異なる列に含まれるので，

$$\exists q_1 \in C_t \quad \text{s.t.} \quad \forall(s \text{ の 1 行目の数字}) \in (q_1 t \text{ の 1 行目})$$

[*13] ただし，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\langle\{t\}, \{s\}\rangle = \delta_{\{t\},\{s\}}$ で定義される M^λ 上の内積.

次に，s の 2 行目に含まれる数字についても同様に，t の相異なる列，すなわち $q_1 t$ の相異なる列に含まれるので

$$\exists q_2 \in C_t \quad \text{s.t.} \quad \forall (s \text{ の } 1 \,\&\, 2 \text{ 行目の数字}) \in (q_2 q_1 t \text{ の } 1 \text{ or } 2 \text{ 行目})$$

この操作を続けて

$$\exists q_1, \ldots, q_k \in C_t \quad \text{s.t.} \quad \forall (s \text{ の最初の } k \text{ 行の数字}) \in (q_k \cdots q_1 t \text{ の最初の } k \text{ 行})$$

特に，

$$\begin{gathered}
\lambda_1 \geqslant \mu_1 \\
\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant \mu_1 + \mu_2 \\
\vdots \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k
\end{gathered}$$

が，$k = 1, 2, \ldots$ についてなりたつ． □

例 5.3.5. $\lambda = 3^2, \mu = 2^2 1^2$

$$s = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 1 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(2,5)(3,6)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

系 5.3.6. $\operatorname{sh} t = \lambda, \operatorname{sh} s = \mu$ とするとき，$\lambda = \mu$ ならば，$\exists p' \in R_s, \exists q \in C_t$ s.t. $p's = qt$.

証明． 上の補題の証明で，qt と s の各行に含まれる数字は同じ．$\therefore qt = p's \; (\exists p' \in R_s)$. □

系 5.3.7. $\lambda, \mu \vdash n$ とする．$\operatorname{sh} t = \lambda, \operatorname{sh} s = \mu$ となる Young 盤 t, s について，$\kappa_t\{s\} \neq 0$ ならば，$\lambda \trianglerighteq \mu$．また $\lambda = \mu$ ならば $\kappa_t\{s\} = \pm \mathbf{e}_t$.

証明． b, c を s の同一行にある数字とすると，これらは t の同じ列に含まれることはない．なぜなら，もし同じ列に含まれるとすると，Sign Lemma より $\kappa_t = k(e - (b, c))$ とかけて，$\kappa_t\{s\} = k(e - (b, c))\{s\} = k(\{s\} - (b, c)\{s\}) = 0$. Dominance Lemma より $\lambda \trianglerighteq \mu$.

$\lambda = \mu$ ならば，上の系より $\{s\} = q\{t\} \; (\exists q \in C_t)$. $\therefore \kappa_t\{s\} = \kappa_t q\{t\} = (-1)^q \kappa_t\{t\} = \pm \mathbf{e}_t$. □

系 5.3.8. $u \in M^\mu, \operatorname{sh} t = \mu$ ならば，$\kappa_t u$ は $\mathbf{e}_t$ のスカラー倍.

証明． $u = \sum_i c_i\{s_i\}, \operatorname{sh} s_i = \mu \; (\forall i)$ とかけて，上の系より $\kappa_t u = (\sum_i \pm c_i)\mathbf{e}_t$. □

定理 5.3.9 (Submodule Theorem)**.** U を M^λ の submodule とすると

$$U \supset S^\mu \quad \text{or} \quad U \subset (S^\mu)^\perp$$

である．特に S^μ は既約.

証明． $u \in U$, t を μ-tableau とする．上の系より $\kappa_t u = f\mathbf{e}_t$ $(\exists f \in \mathbb{C})$

(i)．$f \neq 0$ とする．$u \in U$ ならば $f\mathbf{e}_t = \kappa_t u \in U$ $(\because \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]U \subset U)$ より，$\mathbf{e}_t \in U$．よって $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\mathbf{e}_t = S^\mu \subset U$．

(ii)．$f = 0$ とすると $\kappa_t u = 0$ $(\forall t \text{ s.t. } \mathrm{sh}\, t = \mu)$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathfrak{S}_n$-不変であるから

$$\langle u, \mathbf{e}_t\rangle = \langle u, \kappa_t\{t\}\rangle = \langle \kappa_t u\{t\}\rangle = 0.$$

$S^\mu = \mathbb{C}\text{-}\operatorname{Span}\langle \mathbf{e}_t; \mathrm{sh}\, t = \mu\rangle$ より $u \in (S^\mu)^\perp$. $\therefore U \subset (S^\mu)^\perp$.

従って W を $W \subset S^\mu$ なる submodule とすると，上で示したように

$$W \supset S^\mu \quad \text{or} \quad W \subset (S^\mu)^\perp.$$

前者のときは $W = S^\mu$，後者のときは $W \subset S^\mu \cap (S^\mu)^\perp = \{0\}$. □

命題 5.3.10. $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]}(S^\mu, M^\lambda)$ が nonzero ならば，$\lambda \trianglerighteq \mu$．また $\lambda = \mu$ のとき，θ はスカラー.

証明． $\theta \neq 0$ なので $\exists \mathbf{e}_t \in S^\lambda$(基底ベクトル) s.t. $\theta(\mathbf{e}_t) \neq 0$. $M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$ より θ を $(S^\lambda)^\perp$ 上では 0 と拡張すれば $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C}[M^\lambda, M^\mu])$ と看做せて，

$$0 \neq \theta(\mathbf{e}_t) = \theta(\kappa_t\{t\}) = \kappa_t(\theta\{t\}) = \kappa_t\Big(\sum_i c_i\{s_i\}\Big) \quad (s_i : \mu\text{-tableau})$$

従って $\exists i$ s.t. $\kappa_t\{s_i\} \neq 0$ ゆえ，系 5.3.7 より $\lambda \trianglerighteq \mu$.

次に $\lambda = \mu$ とする．系 5.3.8 より $\theta(\mathbf{e}_t) = c\mathbf{e}_t$ $(\exists c \in \mathbb{C})$.

$$\therefore \theta(\mathbf{e}_{\pi t}) = \theta(\pi\mathbf{e}_t) = \pi\theta(\mathbf{e}t) = \pi(c\mathbf{e}_t) = c\mathbf{e}_{\pi t} \quad (\forall \pi \in \mathfrak{S}_n)$$

$S^\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\mathbf{e}_t$ であるから $\theta = cI_{S^\lambda}$. □

定理 5.3.11. $\{S^\lambda; \lambda \vdash n\}$ は $\mathfrak{S}_n$ の既約表現のすべてを尽くす.

証明． 既約性は既に示した．$\#\{\mathfrak{S}_n$の既約表現$\} = \#\{\mathfrak{S}_n$の共役類$\}$ であるから，

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow S^\lambda \not\simeq S^\mu$$

を示せば十分．$S^\lambda \simeq S^\mu$ とすると，$S^\mu \subset M^\mu$ に注意すれば $\exists \theta \neq 0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]}(S^\lambda, M^\mu)$. よって命題 5.3.10 より $\lambda \trianglerighteq \mu$. 同様に $\mu \trianglerighteq \lambda$. $\therefore \lambda = \mu$. □

参考文献

[1] Fulton and Harris, Representation theory, Springer Verlag

[2] 岩堀長慶, 対称群と一般線型群の表現論 基礎数学講座, 岩波書店

[3] Sagan, The symmetric group, Springer Verlag

[4] Goodmann and Wallach, Representations and invariants of the classical groups, Cambridge University Press

[5] 佐武一郎，線型代数学，裳華房